

Valoración de Bonos

Roberto Knop

Enero 2018

Índice general

1. Valoración	2
1.1. Introducción	2
1.2. Activos a corto plazo	2
1.2.1. Letras	2
1.2.2. Pagarés	3
1.2.3. Depósito	3
1.2.4. Repo	3
1.3. Activos a largo plazo	4
1.4. Bonos cupones cero	4
1.5. Bonos con cupones fijos	5
1.5.1. Descripción	5
1.5.2. La alternativa de la TIR	5
1.5.3. La alternativa de la curva cupón cero	6
1.5.4. Caso práctico	8
1.6. Cupones variables	9
1.6.1. Descripción	9
1.6.2. Valoración	9
1.6.3. Casos prácticos	10
2. Medidas de riesgos	13
2.1. Introducción	13
2.2. Medidas de elasticidad	13
2.2.1. Caso práctico	15
2.3. Relaciones causales	17
2.3.1. Plazo y duración	17
2.3.2. Cupón y duración	17
2.3.3. TIR y duración	18
2.4. Convexidad	18
2.4.1. Caso práctico	19
2.4.2. Propiedades de la convexidad	20

Capítulo 1

Valoración

1.1. Introducción

Los activos de renta fija son los instrumentos que utilizan los emisores en los mercados de capitales para captar financiación ajena a través de títulos negociables en mercado secundario una vez emitidos en los primarios habitualmente a través de mecanismos de subastas o colocación privadas en otros casos. El universo de estos títulos se puede clasificar según su plazo de emisión o también en virtud del tipo de cupones que paguen. Por plazos, encontraremos activos a corto plazo (hasta 18 meses) y activos a largo plazo que pueden alcanzar los 40-50 años según el emisor o mercado.

1.2. Activos a corto plazo

Son títulos que forman parte habitualmente de los mercados monetarios y se emiten con plazos de vida que no superan los 12 o 18 meses, como máximo. En muchas ocasiones, son títulos emitidos al descuento o si no lo son, suelen igualmente concentrar el pago de interés y la devolución del principal en la fecha de vencimiento o amortización final. A continuación se presentan instrumentos a corto plazo, tanto de renta fija como aquellos negociados en mercado monetarios y que no tienen necesariamente un mercado secundario como tal.

1.2.1. Letras

Activo de renta fija emitido al descuento cuyo valor en el momento de la emisión viene dado por:

$$P = \frac{100}{1 + i \times \frac{d}{360}} \quad (1.1)$$

en donde:

P: precio

i: interés nominal

d: días d vida de la letra según convención

Base: número de días considerados por año según convención

El valor final de del título es el nominal de la emisión. El comprador de la letra, la adquiere por un precio inferior al 100 % para acabar recibiendo dicho porcentaje, de tal modo que la rentabilidad queda viene dada por dicha diferencia.

1.2.2. Pagarés

Activo financiero de rendimiento implícito, similar a la letra, emitido habitualmente a corto plazo por entidades privadas o públicas. La valoración suele ser la misma que la de las letras del Tesoro, considerando sus correspondientes tipos de interés, según la calidad crediticia del emisor.

1.2.3. Depósito

Instrumento financiero por el que el tomador de fondos, recibiendo el 100 % del nominal de la operación, se compromete a pagar al vencimiento dicho principal más el interés pactado según la siguiente expresión:

$$VF = N \times \left(1 + i \times \frac{d}{360} \right) \quad (1.2)$$

en donde:

VF: valor final

N: nominal monetario de la operación

i: interés nominal

d: días de vida de la letra según convención

Base: número de días considerados por año según convención

1.2.4. Repo

Operación encubierta de financiación que se caracteriza por la transferencia de un colateral o garantía a favor de quien concede la financiación por parte del que la recibe. La entrega de la garantía, habitualmente en forma de activo financiero (bono, letra) permite acceder a una financiación a tipos de interés más favorables. Se puede plantear la operación como una compra/venta al contado de un activo con retrocesión a futuro. Dado el precio al contado del activo (PC), el precio a plazo (PP) correspondiente es:

donde:

$$PP = (PC + CC) \times \left(1 + i_{repo} \times \frac{d}{360} \right) \quad (1.3)$$

CC: cupón corrido

irepo: tipo de interés pactado en el repo

d: número de días de la operación

1.3. Activos a largo plazo

En el ámbito de los mercados de capitales de renta fija, los títulos de mayor divulgación son aquellos emitidos a un tipo de interés fijo a plazos de amortización que va desde los 2 años hasta plazos máximos del entorno de 40-50 años. Esto no excluye la existencia de títulos a plazos superiores o incluso bonos de vencimiento indefinido, más en concreto denominados, deuda perpetua. En todo caso, los instrumentos más habituales son los bonos cupones cero o bonos con cupón fijo.

1.4. Bonos cupones cero

Bonos de rendimiento implícito emitidos habitualmente al descuento en el que todos los flujos (intereses y principal) se abonan en el vencimiento. Su valor viene dado por

$$P = \frac{100}{(1 + Z)^{FA}} \quad (1.4)$$

en donde

P: precio

Z: tipo cupón cero

FA: vida del bono en años

Este tipo de bonos son emitidos habitualmente incluso por entidades de máxima calidad crediticia como los gobiernos en forma de instrumentos llamados Strips. Los Strips son el resultado de la segregación de flujos de caja de bonos de rendimiento explícito.

El precio de un bono es el valor presente de sus flujos de caja. Se genera, por un lado la necesidad de definir los flujos de caja y por otro la definición de una curva de descuento para descontar dichos flujos de caja. Partamos inicialmente de dos tipos básico de bonos:

1. Bonos con cupones fijos
2. Bonos con cupones variables

Dentro de la primera categoría, encontraremos bonos con cupones periódicos o únicos a vencimiento, denominados habitualmente bonos cupones cero. En cualquiera de ellos la determinación de los flujos de caja es inmediata según las condiciones de emisión del bono por lo que la única función de descuento relevante será la de descuento. Las fuentes de rendimiento de este tipo de bono son:

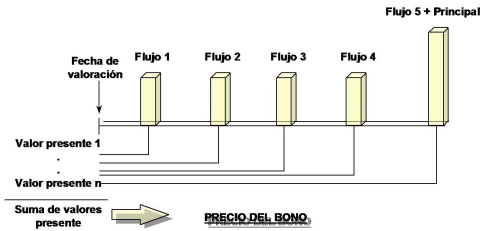
1. Cupones: son una fuente cierta de rentabilidad
2. Reinversión de flujos: es una fuente incierta de rentabilidad
3. Ganancias de capital: es una fuente incierta de rentabilidad

En el segundo grupo los más habituales serán los Floating Rate Notes cuyos cupones están vinculados a algún índice del mercado monetario. En el caso europeo, habitualmente estarán vinculados al Euribor a cualquiera de sus plazos cotizados. La estimación de los flujos de caja requiere una curva de tipos interés acorde al índice de referencia y para la actualización de flujos será necesaria otra función de descuento adecuada a la calidad crediticia del emisor del bono.

1.5. Bonos con cupones fijos

1.5.1. Descripción

Activos de renta fija de rendimiento explícito que devengan flujos de caja periódicos constantes y conocidos hasta su vencimiento, momento en el cual se reintegra el principal del mismo.



Su precio viene dado por:

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{F_i}{(1 + TIR)^T} \quad (1.5)$$

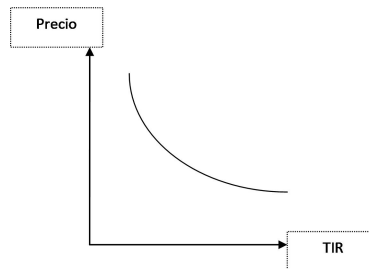
en donde:

P : precio del bono

F : flujos de caja

TIR : tasa interna de rentabilidad

T : tiempo



Existen dos alternativas para el proceso de actualización de flujos de caja. La utilización de una única tasa interna de rentabilidad frente a una curva cupón cero que permita la actualización de cada flujo de caja a su tipo de interés correspondiente.

1.5.2. La alternativa de la TIR

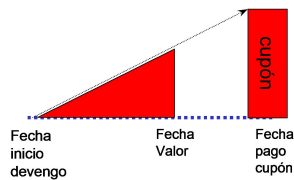
El criterio de utilización de la TIR implica una serie de asunciones.

1. Asumir una curva plana para los distintos plazos por la que se genera una función con pendiente negativa y convexa.
2. Aumentos de la TIR provocan una caída de la variable dependiente (P) aunque cada vez menos intensa en magnitud. La variable dependiente aumenta cada vez más para iguales caídas de la TIR.

3. Asumir que los flujos de caja futuros una vez cobrados se irán reinvertiendo a la misma TIR. Esto supone estabilidad de los tipos de interés a lo largo del tiempo.

El Precio (P) hallado como la suma del valor presente de todos los flujos caja de un bono (cupones y principal) representa el valor de mercado del título considerando los tipos de interés también de mercado. Representa por tanto, la cantidad en porcentaje a pagar por la adquisición del mismo. En los mercados de bonos (primarios o secundarios) el valor cotizado suele ser “ex-cupón”, es decir sin considerar el cupón devengado hasta la fecha. Obviamente el valor total del bono se compone de su cotización y cupón corrido. El cupón corrido de un bono es la cantidad de del cupón en vigor que se ha devengado desde el anterior pago de cupón hasta la fecha de valoración en que nos encontremos y se obtiene como:

$$\text{Cupon Corrido} = \frac{\text{Cupon Nominal}}{\text{Base}} \times (\text{Fecha valor} - \text{Fecha anterior cupon}) \quad (1.6)$$



EJEMPLO

En el mercado secundario de deuda pública española, supongamos que un Bono con vencimiento 30/7/2015 con cupón del 4,00 % (pagadero anualmente) cada 30/07 define una TIR del 4 % (base Act/Act). Suponiendo que el título tuviese un nominal de 1.000 euros, con fecha valor 10/9/2012 deberíamos pagar por él :

$(100,00 \% + 0,4603 \%) \times 1.000 \text{ euros} = 1.004,60 \text{ euros}$ que se han obtenido:

Del 100,46303 %, el cupón corrido es de:

$$\text{Cupon Corrido} = \frac{4}{365} \times (10/9/12 - 30/7/2012) = 0,4603$$

siendo la cotización de mercado 100,00 %.

La tabla de flujos correspondiente a la valoración de este bono a una TIR del 4 % es:

Fechas (1)	Días (2)	Años (3)	Flujos (4)	VP(Flujos) (5)
10/09/2012				
30/07/2013	323	0,88	4,00	3,86
30/07/2014	688	1,88	4,00	3,72
30/07/2015	1053	2,88	104,00	92,88
				100,46

1.5.3. La alternativa de la curva cupón cero

Utilizar la curva cupón cero supone contemplar una estructura temporal completa de tipos de interés de tal modo que cada flujo de caja se descuenta con un tipo de interés distinto. Existen relaciones entre TIR y curva cupón cero, de tal modo que se debería llegar al mismo precio del bono teórico, utilizando la TIR o una curva cupón cero siempre y cuando esta haya sido obtenida por técnicas que incorporen los precios de mercado de los bonos existentes y que su construcción esté basada en la réplica exacta de dichos precios

de mercado. Se pueden definir dos corrientes metodológicas para abordar este tema:

A) MÉTODOS ECONOMÉTRICOS: se impone una forma funcional a la curva que dependa de un número finito y reducido de parámetros que se han de ajustar para obtener una curva teórica que minice errores. Entre estos métodos de modelización destacan:

- Polinómica (Chambers, Carletton, Waldman-1984).
- Splines cúbicos polinómicos (McCulloch-1971, 1975): ver anexo.
- Splines exponenciales (Vasicek, Fong -1982): ver anexo.
- Nelson,Siegel -1987
- Svensson-1994.

El principal inconveniente de estos modelos es que no permiten ajustar exactamente los precios de mercado, por lo que se ajustan mediante la realización de un proceso de minimización de errores.

B) METODOS RECURSIVOS

ITERATIVE BOOTSTRAPPING: es una técnica basada en crear una curva que se ajuste exactamente al precio de los activos en mercado. Requiere, por tanto, información de precios de activos de renta fija y se basa en:

- Estimación directa de los tipos cupones cero a partir de los precios de instrumentos con cupones cero.
- Estimación recursiva o iterativa para el resto de instrumentos, partiendo de la premisa de que el precio a replicar es siempre el precio al que se cotiza en mercado.

Proceso

Se ordenan los productos según su vencimiento. Generalmente los primeros serán letras o pagarés al descuento. De estos se podrán obtener los tipos cupón cero directamente mediante:

$$P = \frac{1}{(1 + Z_i)^T} \quad (1.7)$$

$$Z = \left[\frac{1}{P} \right]^{(1/T)} - 1 \quad (1.8)$$

Cuando se tengan activos con cupones intermedios, se actualizarán los mismos interpolando los tipos previamente obtenidos. En los cupones de vencimiento posterior al último tipo cupón cero obtenido de forma directa por la anterior expresión, se actualizarán en una primera iteración con el último tipo disponible. Una vez que se dispongan de todos los flujos actualizados, excepto el último de la amortización, éste se actualizará aplicando:

$$P = \sum_{i=1}^{n-1} C \times FD_i + (100\% + C)FD_n \quad (1.9)$$

$$FD_n = \frac{P - \sum_{i=1}^{n-1} C \times FD_i}{(100\% + C)} \quad (1.10)$$

en donde:

FD: factor de descuento

P: precio del bono

z: tipo cupón cero

Obtenido el factor de descuento (consiguientemente el tipo cupón cero) del último flujo del bono, los cupones actualizados al último tipo antes disponible directamente ahora se vuelven a estimar interpolando linealmente entre dicho tipo y el obtenido para el último flujo. La premisa fundamental será replicar exactamente el precio del bono en mercado, actualizando sus flujos a los tipos estimados.

Esquemáticamente por ejemplo, si conocemos el precio de una letra al descuento a 6 meses, a 12 meses y el de un bono con cupones semestrales a 2 años haríamos:



1.5.4. Caso práctico

Se analizará un Bono del Tesoro español con cupón 3,75 % anual (ActAct) y vencimiento el 31/10/2015. Al tratarse de un bono a tipo fijo la definición de los flujos de caja viene dada por sus condiciones estáticas. En este caso, cupones del 3,75 % sobre el nominal de referencia. Se tomará como fecha valor el 4 de Abril de 2013 con una cotización de mercado de 102,20. Se realizará su valoración tanto por TIR como por curva cupón cero generada a partir de Iterative BootStrapping.

2) Descripción de bono		2) Descripción de emisor	
Páginas		Información de emisor	
1) Info del bono	Nombre	BONOS Y OBLIG DEL ESTADO	
2) Más info	Industry	Soberanos	
3) Cláusulas	Información de valor		
4) Fiadores	Market	Eurozona	
5) Ratings	País	ES	Divisa
6) Identificadores	Ranking	Sr Unsecured	Serie
7) Bolsas	Cupón	3.75	Tipo
8) Partes inv	Frec	Anual	Fijo
9) Tarifas, restric	Días	ACT/ACT	Precio
10) Programas	Vence	10/31/2015	99.71400
11) Cupones	Emitido/Vigente		
Entoces rápidos	BULLET		
32) ALLQ Precios	Spread emis		
33) QRD Resumen co	Cálculo (1029)SPAIN:GOVT BONDS		
34) TDH Historia ope	Fecha de anuncio		
35) CACS Acción corp	09/14/2012		
36) CF Prospecto	Fecha de devengo		
37) CN Noticias	09/25/2012		
38) HDS Tenedores	1ra liquidación		
	09/25/2012		
	1er cupón		
	10/31/2012		
66) Enviar bono	Mínimo/Incremento		
	1,000.00 / 1,000.00		
	Nominal		
	1,000.00		
	Contable		
	Bolsa		
	MADRID		

La valoración bajo ambos enfoques sería:

- Curva de riesgo interbancario para el cálculo de los tipos forwards del índice de referencia (por ejemplo: euribor 3 meses).
- Curva de riesgo emisor para el descuento de los flujos de caja esperados (incluyendo spread si lo hubiera) del bono una vez que estos hayan sido estimado por la curva de riesgo interbancarios.

1.6.3. Casos prácticos

Caso 1

Sea un bono emitido por EuroHypo AG con vencimiento 2008 que paga trimestralmente cada 22 de enero, abril, julio y octubre el euribor a 3 meses que se haya fijado tres meses antes. El primer cupón se fijó el 22/10/98 y se pagó el 22/1/99.

SECURITY DESCRIPTION		Redenominates on 1/ 1/99
DEUTSCHE HYP F/H EURHYP Float €/ 99,9812/100.0312		BGN @ 9/30
ISSUER INFORMATION		IDENTIFIERS
Name EURHYP AG	Common 009623655	1) Euro Redenomination
Type Mortgage Banks	ISIN DE0002968500	2) Additional Sec Info
Market of Issue Euro-Zone	Hertpap. 296850	3) Floating Rates
SECURITY INFORMATION		RATINGS
Country DE	Currency EUR	Moody's Aaa
Collateral Type Pfandbriefe	Fitch AAA	4) ALL0
Calc Typ(21)FLOAT RATE NOTE	Composite AAA	5) Corporate Actions
Maturity 10/22/2008 Series 1270	ISSUE SIZE	6) Ratings
NORMAL	Amt Issued	7) Custom Notes
Coupon 2.12738 Floating QUARTLY	EUR 76,693.78 (M)	8) Identifiers
QUARTL EU LIBFLAT ACT/360	Amt Outstanding	9) Fees/Restrictions
Announcement Dt 10/15/98	EUR 76,693.78 (M)	10) Sec. Specific News
Int. Accrual Dt 10/22/98	Min Piece/Increment	11) Issuer Information
1st Settle Date 10/22/98	0.01/ 0.01	12) Pricing Sources
1st Coupon Date 1/22/99	Par Amount 511.29	13) Related Securities
Iss Pr	BOOK RUNNER/EXCHANGE	14) Issuer Web Page
NO PROSPECTUS	FRANKFURT	65) Old DES
ÖFFENTLICHE PFANDBRIEFE.		66) Send as Attachment

Para llevar a cabo la valoración de este bono es necesario:

- 1) Calcular la rama flotante de de flujos de caja variables vinculados al tipo Euribor 3 meses (riesgo interbancario) con reprecación trimestral hasta el 22/10/08. Es decir, al margen del primer cupón quedará fijado desde un principio, se trata de calcular los tipos forward (implícitos) a 3 meses durante años restantes hasta el vencimiento.
- 2) Descontar los flujos de caja esperados vinculados a los tipos a 3 meses con la curva de riesgo interbancaria.
- 3) Descontar el principal final con la curva de riesgo interbancario.

Al tener un spread nulo sobre euribor, la curva de estimación de tipos forwards y la de descuento coinciden. Ambas son las de riesgo interbancario puro. El precio de mercado de la estructura es:

$$P = \sum_{i=1}^n (Tim_i F D_i F A_i N) + N F D_n \quad (1.11)$$

Tim : tipo de interés implícito a 3 meses

N : nominal

FA : fracción de año en el que se devenga

FD: factor de descuento

Caso 2

Sea un bono emitido por Telefónica con vencimiento 2009 que paga trimestralmente cada 30 de marzo, junio, septiembre y diciembre el euribor a 3 meses más 0,63 % que se haya fijado tres meses antes. El primer cupón se fijó el 9/7/99 y se pagó el 30/6/99 a partir de cuando el lag entre fijación y pago ha venido siendo de 3 meses.

SECURITY DESCRIPTION		Page 1 / 3
TELEFONICA S.A. TELEFO Float 09 NOT PRICED		
ISSUER INFORMATION	IDENTIFIERS	1) Additional Sec Info
Name TELEFONICA S.A.	ISIN ES0278430949	2) Floating Rates
Type Telephone-Integrated	BB number EC1401230	3) ALLO
Market of Issue Euro-Zone		4) Corporate Actions
SECURITY INFORMATION	RATINGS	5) Par Cds Spreads
Country ES Currency EUR	Moody's A3	6) Ratings
Collateral Type Bonds	S&P A	7) Custom Notes
Calc Typ (21)FLOAT RATE NOTE	DBRS AL	8) Identifiers
Maturity 6/30/2009 Series	ISSUE SIZE	9) Fees/Restrictions
NORMAL	Amt Issued	10) Involved Parties
Coupon 2.698 Floating ANNUAL	EUR 300,000.00 (M)	11) Issuer Information
QUARTL EURIBO+63 ACT/360	Amt Outstanding	12) Pricing Sources
Announcement Dt 5/25/99	EUR 300,000.00 (M)	13) Related Securities
Int. Accrual Dt 7/ 9/99	Min Piece/Increment	14) Issuer Web Page
1st Settle Date 7/ 9/99	100,000.00/100,000.00	
1st Coupon Date 6/30/00	Par Amount 100,000.00	
Iss Pr 100.0000	BOOK RUNNER/EXCHANGE	65) Old DES
NO PROSPECTUS	CAJAMI-sole	66) Send as Attachment
	AIAF	
CPN RATE=12MO EURIBOR +63BP, SHORT 1ST CPN.		
<small>Australia 61 2 9777 8600 Brazil 5511 3048 4500 Europe 44 20 7330 7500 Germany 49 69 920410 Hong Kong 852 2977 6000 Japan 81 3 3201 8900 Singapore 65 6212 1000 U.S. 1 212 318 2000 Copyright 2005 Bloomberg L.P. 0905-95-0 03-Oct-05 10:10:14</small>		

Caso 3

Se analizará un Bono del Tesoro español con cupón flotante trimestral €Euribor 3 meses + 0,40% (Act360) y vencimiento el 17/3/2015. Se trata de un bono que paga trimestralmente cada 17 de marzo, junio, septiembre y diciembre el Euribor a 3 meses que se haya fijado tres meses antes más 0,40 %. El primer cupón se fijó el 17/3/10 y se pagó el 17/06/10. Al tratarse de un bono a tipo flotante la estimación de los flujos de caja viene dada la curva Euribor generada a partir de instrumentos con dicho subyacente.

DES		SPANISH GOV'T SPGB Float 03/15 99.2180/99.9440		BGN @12:54
SPGB Float 03/17/15 Corp		99 Comente		Pg 1/11 Descripción: Bono
99 Notes		99 Comprar		99 Vender
99 Paráms				
2) Descripción de bono		2) Descripción de emisor		
Páginas	Información de emisor	Identificadores		
1) Info del bono	Nombre BONOS Y OBLIG DEL ESTADO	Número BB EI1846571		
2) Más info	Industry Soberanos	ISIN ES00000122G0		
3) Cláusulas	Información de valor	BBGID BBG00001DDL0		
4) Fiadores	Mercado Eurozona	Ratings		
5) Ratings	Pais ES Divisa EUR	Moody's Baa3		
6) Identificadores	Ránking Unsecured Serie	S&P BBB-		
7) Bolsas	Cupón 0.623 Tipo Flotante	Fitch BBB		
8) Partes inv	Formula QUARTLY EURIBOR +40.0000	DBRS AL		
9) Tarifas, restric	Días ACT/360 Precio 99.75400	Emisión y operación		
10) Programas	Vence 03/17/2015	Emitido/Vigente		
11) Cupones	BULLET	EUR 1,500,000.00 (M) /		
Enlaces rápidos	spread emis	EUR 1,500,000.00 (M)		
3) ALLO Precios	Cálculo (21)FLOAT RATE NOTE	Mínimo/Incremento		
3) ORD Resumen co	Fecha de anuncio 03/10/2010	1,000.00 / 1,000.00		
3) TDH Historia ope	Fecha de devengo 03/17/2010	Nominal 1,000.00		
3) CAC Acción corp	Ira liquidación 03/17/2010	Contable BNP,CAJAMI,DB		
3) CF Prospecto	1er cupón 06/17/2010	Bolsa Múltiple		
3) CN Noticias				
3) HDS Tenedores				
3) VPR Info subyac				
3) Enviar bono				
<small>Australia 61 2 9777 8600 Brazil 5511 3048 4500 Europe 44 20 7330 7500 Germany 49 69 9204 1210 Hong Kong 852 2977 6000 Japan 81 3 3201 8900 Singapore 65 6212 1000 U.S. 1 212 318 2000 Copyright 2013 Bloomberg Finance L.P. SH 161898 CET GMT+1:00 H442-5114+1 20-Nov-2013 17:15:00</small>				

Para llevar a cabo la valoración de este bono es necesario:

1) Calcular la rama flotante de flujos de caja variables vinculados al tipo Euribor 3 meses (riesgo interbancario) con reprecación trimestral hasta el 17/3/2015. Es decir, al margen del primer cupón quedará fijado desde un principio, se trata de calcular los tipos forward (implícitos) a 3 meses durante años restantes hasta el vencimiento.

2) Descontar los flujos de caja esperados vinculados a los tipos a 3 meses con la curva de riesgo soberano Tesoro de España.

3) Descontar el principal final con la curva de riesgo Tesoro.

Al tener un spread positivo respecto al Euribor, la curva de estimación de tipos forwards y la de descuento no coinciden. El precio de mercado de la estructura es:

$$P = \sum_{i=1}^n [Tim_i + 0,40\%] FD_i FA_i N + N FD_n \quad (1.12)$$

Tim: tipo de interés implícito a 3 meses

N: nominal

FA: fracción de año en el que se devenga

FD: factor de descuento

Capítulo 2

Medidas de riesgos

2.1. Introducción

Existe una relación inversa entre el tipo de interés y el precio asociado a un activo de renta fija. El grado de sensibilidad entre ambas variables viene determinada por la extensión de la vida del título, el nivel absoluto de los tipos de interés y la estructura de flujos de caja del mismo. Tres principios rigen los aspectos básicos de los activos de renta fija. Estos son los llamados principios de Malkiel.

- El valor de un bono varía en sentido contrario al de su TIR.
- Si dos bonos difieren únicamente en el cupón, entonces para una determinada variación de la TIR, el bono de menor cupón experimentará mayor cambio de valor.
- Para un bono dado, un incremento de TIR provoca una variación de precio menor que la provocada en sentido inverso por una bajada de TIR de igual magnitud que la anterior. En las próximas páginas se analizarán y probarán cada uno de ellos.

2.2. Medidas de elasticidad

En los instrumentos de renta fija, la medición de riesgos en términos de elasticidad resulta inmediata dada la dependencia del valor del activo respecto a los niveles de tipos de interés. Dada la función que relaciona el precio y a TIR de un bono, resulta esencial cuantificar el impacto sobre el valor de un activo de renta fija de una variación unitaria en los tipos de interés (variable fundamental de estos instrumentos). Para ello derivaremos la anterior función y obtendremos:

- Sensibilidad Absoluta
- Duración Modificada
- Duración

Estas medidas hacen referencia a aspectos vinculados al:

- RIESGO: Exposición del valor de un bono ante variaciones unitarias de la TIR.
- TIEMPO: Vida media residual de los flujos ponderada por su valor actual.

Por ejemplo, para un valor de 5 de duración podemos decir de ese bono que:

- Su precio caerá aproximadamente un 5 % ante una subida porcentual de la TIR de un 1 %
- Su vida residual media ponderada es de 5 años.

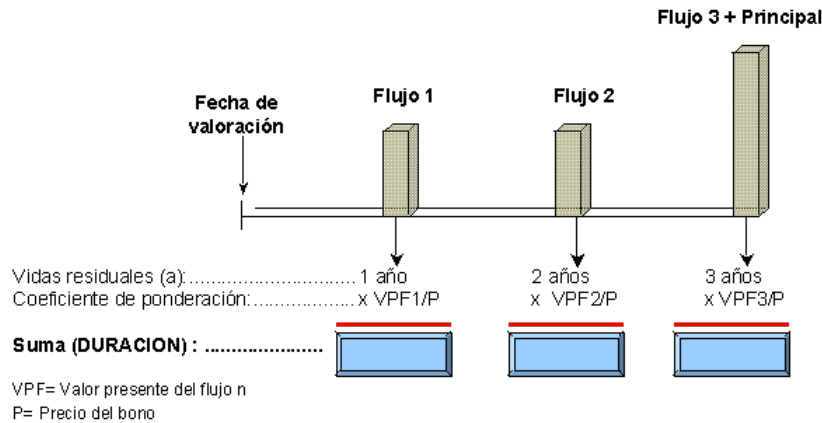
Aparece el apelativo de aproximadamente, ya que las tres medidas de elasticidad precio-TIR son una aproximación analítica a la función real. De hecho, la sensibilidad absoluta es la primera derivada de dicha función, aproximando la misma a través de una recta a pesar de que es una función convexa. La existencia de tres medidas de elasticidad, se justifica simplemente por las distintas posibilidades en las que se pueden expresar las variaciones tanto de precio como de TIR. Convendremos las siguientes:

	Variaciones Absolutas	Variaciones Relativas
Precio	$P_2 - P_1$	$\frac{P_2 - P_1}{P_1}$
TIR	$TIR_2 - TIR_1$	$\frac{TIR_2 - TIR_1}{1 + TIR_1}$

Bajo las anteriores premisas tenemos que:

Duración	Representa la variación porcentual o relativa del precio del bono ante una variación porcentual unitaria de la TIR. $\frac{P_2 - P_1}{P_1} \approx -D \frac{TIR_2 - TIR_1}{1 + TIR_1}$
Duración Modificada	Representa la variación porcentual o relativa del precio del bono ante una variación absoluta unitaria de la TIR. $\frac{P_2 - P_1}{P_1} \approx -DM(TIR_2 - TIR_1)$
Sensibilidad	Representa la variación absoluta del precio del bono ante una variación absoluta unitaria de la TIR. $P_2 - P_1 \approx -SA(TIR_2 - TIR_1)$

Financieramente, la duración resulta muy intuitiva si acudimos a aquella definición basada en el aspecto temporal de la misma, de tal modo que tenemos:



Matemáticamente:

Duración	$\frac{1}{P} \sum_{i=1}^n \frac{F_i T_i}{(1 + TIR)^T} \quad (2.1)$
Duración Modificada	$\frac{1}{P} \sum_{i=1}^n \frac{F_i T_i}{(1 + TIR)^{T+1}} \quad (2.2)$
Sensibilidad	$\sum_{i=1}^n \frac{F_i T_i}{(1 + TIR)^{T+1}} \quad (2.3)$

en donde:

P : precio

F : Flujo

T : fracción de año

n : nº de flujos

D : duración

DM : duración modificada

SA : sensibilidad absoluta

Entre las tres expresiones, existe por tanto, la siguiente relación:

$$SA = \frac{D}{1 + TIR} \times \frac{P}{100} \quad (2.4)$$

2.2.1. Caso práctico

Sea un bono con vencimiento 30/07/15 con cupón del 4% (pagadero anualmente Act/Act) cada 30/07 y las siguientes condiciones:

Fecha valor: 10/9/12

Cotización: 100,00

Se pide calcular las medidas de elasticidad: sensibilidad, duración y duración modificada además de llevar a cabo su interpretación para una bajada en la TIR de un 1%.

SOLUCIÓN

Con fecha valor 10/09/2012 deberíamos pagar por él : $(100,00\% + 0,4603\%) = 100,4603\%$

El cupón corrido se ha obtenido de la siguiente manera:

$$CuponCorrido = \frac{4}{365} \times (10/9/12 - 30/7/2012) = 0,4603$$

siendo la cotización de mercado 100,00%.

La tabla de flujos correspondiente a la valoración de este bono a una TIR del 4% es:

Fechas	Días	Años	Flujos	VP(Flujos)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
10/09/2012				
30/07/2013	323	0,88	4,00	3,86
30/07/2014	688	1,88	4,00	3,72
30/07/2015	1053	2,88	104,00	92,88
				100,46

La duración es

$$\frac{1}{P} \sum_{i=1}^n \frac{F_i T_i}{(1 + TIR)^T}$$

Fechas	Días	Años	Flujos	VP(Flujos)	(3) x (5)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(3) x (5)
10/09/2012					
30/07/2013	323	0,88	4,00	3,86	3,42
30/07/2014	688	1,88	4,00	3,72	7,00
30/07/2015	1053	2,88	104,00	92,88	267,96
				100,46	278,38
TIR				4,00%	2,957%

$$Duracion = \frac{1}{100,46} 295,68 = 2,771$$

$$DuracionModificada = \frac{D}{1 + TIR} = \frac{2,771}{1 + 4\%}$$

$$SensibilidadAbs = DM \times Precio = 2,6645 \times 100,46\% = 2,6768$$

Las respectivas interpretaciones de cada una de las tres medidas de elasticidad serían:

Duración

Si la TIR baja un 1 % en términos relativos o porcentuales $[(1+4\%) \times (1-1\%) - 1] = 2,9569\%$ esto supone que le corresponde un precio total de 103,2988, con lo que tenemos:

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} \approx -D \frac{TIR_2 - TIR_1}{1 + TIR_1};$$

$$\frac{103,2988 - 100,46}{100,46} = 2,826 \approx -2,771 \times \left(\frac{0,029569 - 0,04}{1 + 0,04} \right)$$

Duración Modificada

Si la TIR baja un 1 % en términos absolutos esto supone que le corresponde un precio total de 103,1877 con lo que tenemos:

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1} \approx -DM(TIR_2 - TIR_1);$$

$$\frac{103,1877 - 100,46}{100,46} = 2,715\% \approx -2,6645 \times \left(\frac{0,03 - 0,04}{1 + 0,04} \right)$$

Sensibilidad Absoluta

Si la TIR baja un 1 % en términos absolutos esto supone que le corresponde un precio total de 103,1877, con lo que tenemos:

$$P_2 - P_1 \approx -DM(TIR_2 - TIR_1);$$

$$103,1877 - 100,46 = 2,728 \approx -2,6768 \times (0,03 - 0,04)$$

El precio sube realmente 2,728 puntos del bono. Existe, por tanto un error de estimación de 0,06 que se debe a la convexidad de la función que realmente vincula el precio y la TIR del bono y que al derivar en primer orden para el cálculo de la sensibilidad ha sido ignorada, ya que se asume implícita y artificialmente una función lineal.

2.3. Relaciones causales

La duración (o cualquiera de las otras medidas de elasticidad e primer orden) tiene una relación causal con el plazo del bono, el cupón y la TIR. A continuación se analizan estas relaciones.

2.3.1. Plazo y duración

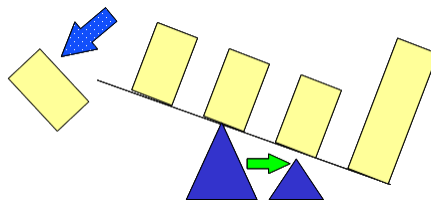
Existe una relación positiva entre el plazo y duración. Manteniendo constante las demás variables, la duración de un bono, generalmente aumenta con su plazo. No es aplicable, sin embargo en el caso de bonos negociados muy al descuento y con plazo de amortización a muy largo plazo. En estos casos, en primera instancia, la duración aumenta con el plazo, hasta un punto determinado, de forma asintótica a partir de donde la duración comienza a decaer. En otras palabras, el peso teórico del principal final de un bono es despreciable, en términos de valor actual.

La duración de un bono cupón cero es igual a su plazo ya que el peso del flujo final y único es 100 %.

2.3.2. Cupón y duración

Existe una relación negativa entre cupón y duración. A mayores (menores) cupones menor (mayor) es el riesgo de reinversión. Con mayores (menores) cupones antes (más tarde) se recuperan los flujos totales de inversión. Asumiendo movimientos paralelos de la curva de TIR, cualquier escenario favorecerá la reinversión de mayores flujos de caja. En bajadas de TIR, el efecto positivo en el precio del bono compensa más que proporcionalmente el efecto negativo que se deriva de una reinversión de flujos a TIR más bajas.

Tras el pago de cupón, el flujo que más pondera pasa de ser uno con vida residual mínima a uno con vida residual de un año (con cupones anuales). Por esta razón tras el pago de un cupón, con las demás variables constantes, la duración aumenta.



2.3.3. TIR y duración

Existe una relación negativa entre TIR y duración. Mayores (menores) TIR supondrán un menor riesgo precio. El aumento de la duración con el plazo de vencimiento, es más acentuado cuanto menor es la TIR, ya que tanto mayor será el peso relativo de los flujos más lejanos.

La relación negativa entre TIR y duración se intensifica cuanto más lejano sea el vencimiento, puesto que la reducción del peso relativo de los flujos finales es más acentuada.

En resumen las relaciones existentes entre las tres variables y la duración son:

VARIABLE	Duración
Plazo	Positiva
Cupón	Negativa
TIR	Negativa

2.4. Convexidad

La función que define la relación TIR-precio en un activo de renta fija con flujos intermedios no es una recta. Es una curva convexa. Ello supone que la aproximación obtenida por la primera familia de elasticidades: duración, duración modificada o sensibilidad no se ajusta perfectamente a la función real. Para una mayor aproximación hallaremos la segunda derivada de la función.

$$\frac{d^2 P}{dTIR^2} = \sum_{i=1}^n \frac{F_i T_i (T_i + 1)}{(1 + TIR)^{T+2}} \quad (2.5)$$

la convexidad modificada es:

$$\frac{1}{P} \sum_{i=1}^n \frac{F_i T_i (T_i + 1)}{(1 + TIR)^{T+2}} \quad (2.6)$$

la convexidad es:

$$\frac{d^2 P}{dTIR^2} / P \quad (2.7)$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \left[\frac{dP}{dTIR} \Delta TIR \right] + \left[\frac{1}{2!} \frac{d^2 P}{dTIR^2} \Delta TIR^2 \right] + \left[\frac{1}{3!} \frac{d^3 P}{dTIR^3} \Delta TIR^3 \right] + \dots + \left[\frac{1}{n!} \frac{d^n P}{dTIR^n} \Delta TIR^n \right]$$

si dividimos por P

$$\frac{\Delta P}{P} = \left[\frac{dP}{dT} \frac{1}{P} \Delta TIR \right] + \left[\frac{1}{2!} \frac{d^2 P}{dTIR^2} \frac{1}{P} \Delta TIR^2 \right] + \left[\frac{1}{3!} \frac{d^3 P}{dTIR^3} \frac{1}{P} \Delta TIR^3 \right] + \dots + \left[\frac{1}{n!} \frac{d^n P}{dTIR^n} \frac{1}{P} \Delta TIR^n \right]$$

en general

$$\frac{\Delta P}{P} = [C_1 \Delta TIR] + \left[\frac{1}{2} C_2 \Delta TIR^2 \right] + \left[\frac{1}{6} C_3 \Delta TIR^3 \right] + \dots + \left[\frac{1}{n!} C_n \Delta TIR^n \right]$$

$$\frac{\Delta P}{P} = [DM \Delta TIR] + \left[\frac{1}{2} Convex \Delta TIR^2 \right] + residuo$$

Esto supone que ahora debemos considerar, por ejemplo en términos de sensibilidad absoluta en primer y segundo orden:

$$P_2 - P_1 \approx -SA(TIR_2 - TIR_1) + \frac{1}{2} CM(TIR_2 - TIR_1)^2$$

Resultando práctico establecer un coeficiente corrector por convexidad (CCC):

$$CCC = \frac{1}{2} CM(1\%)^2 Precio$$

Para conocer el efecto de la convexidad para variaciones distintas a 1 p.p.:

$$CCC(\Delta TIR)^2$$

2.4.1. Caso práctico

Sea un bono con vencimiento 30/07/15 con cupón del 4% (pagadero anualmente Act/Act) cada 31/01 y las siguientes condiciones:

Fecha valor: 10/9/12

Cotización: 100,00

C.corrido: 0,4603

Precio total: 100,4603

TIR: 4%

Duración: 2,771

D.Modificada: 2,6645

Sensibilidad: 2,6768

Se pide calcular su convexidad

Fechas	Días	Años	Flujos	VP(Flujos)	(4)(3)(3)+1	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(3) x (5)	(1+r)^(3)+2
10/09/2012						
30/07/2013	323	0,88	4,00	3,86	3,42	5,96
30/07/2014	688	1,88	4,00	3,72	7,00	18,68
30/07/2015	1053	2,88	104,00	92,88	267,96	962,52
				100,4608	278,38	987,16

$$\frac{1}{P} \sum_{i=1}^n \frac{F_i T_i (T_i + 1)}{(1 + TIR)^{T+2}} = \frac{1}{100,4648} 987,16 = 9,8263 \quad (2.8)$$

Como la convexidad modificada no tiene ningún significado financiero, calculamos el coeficiente que nos permite llevar el concepto a términos de precios.

$$CCC \approx \frac{1}{2} 9,8263 \left(\frac{1}{100}\right)^2 100,46 = 0,04963$$

Considerando los dos efectos sobre el precio original del bono y para variación a la baja de las TIR, por ejemplo de 2%, tendríamos

$$100,46 + (-2,6768 \times 2) + (2^2 + 0,0493) = 106,0118$$

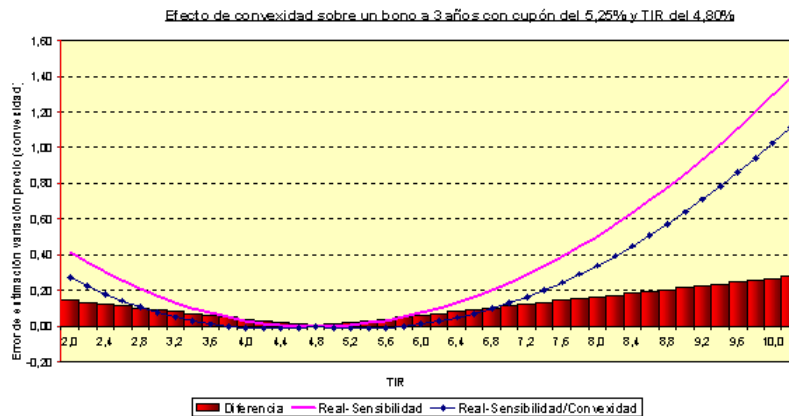
Cuando solo por duración/sensibilidad habríamos estimado una caída de precio hasta:

$$100,46 + (-2,6768 \times 2) = 105,8144$$

El precio real del bono si la TIR cayese un 2% habría sido 106,009

2.4.2. Propiedades de la convexidad

LA CONVEXIDAD ES ASIMÉTRICA: Los repuntes de precios de un activo como consecuencia de descensos de rentabilidad en una magnitud determinada, suelen ser superiores a los descensos de los mismos ante un aumento de la TIR de similar cuantía. Esto se debe a la relación creciente, aunque no lineal entre duración y convexidad.



LA CONVEXIDAD ES POSITIVA: Duraciones elevadas suponen mayores convexidades.

LA CONVEXIDAD ES MÁXIMA CON CUPONES BAJOS. En casos extremos, los bonos cupones cero definen mayor convexidad que títulos con similar vencimiento. No obstante, son menos convexas que bonos de misma duración y con flujos intermedios.

LA CONVEXIDAD ES “DESEABLE” para el comprador de bonos. Siempre va a su favor. En la medida en la cual la duración y la convexidad se relacionan de forma positiva, las relaciones causales que se daban entre plazo, cupón, TIR con la duración, son las mismas para la convexidad.

Bibliografía

- [1] “Análisis de la duración”. Bierwag. Alianza Economía y Finanzas. 1991
- [2] “Bond Risk Analysis. A guide to Duration and Convexity”. Douglas, C.F.A. New York Institute of Finance.(NYIF).1990
- [3] “Como manejar los tipos de interés”. Lamothe, Loroche, Carranceja. 1990
- [4] “Controlling & Managing Interest Rate Risk”. Cornyn. NYIF. 1997
- [5] “Duration, Convexity and other Bond Risk Measures” Fabozzi. 1999
- [6] “Formulae for Yield and other calculations”. Patrick Brown. Association of International Bond Dealers.1995
- [7] “Valuation of fixed income securities & derivatives”. Fabozzi. 2001
- [8] “Manual de Instrumentos de Renta Fija”. Roberto Knop. 2006-2013